Wolfgang Gröbner
(11.2.1899 – 20.08.1980) –
ein Südtiroler Mathematiker

Heinrich Reitberger
Institut für Mathematik der Universität Innsbruck

1 Sein Leben[1]

Als wir an einem heißen Augusttag des Jahres 1980 Prof. Gröbner in einem Sanatorium geistlicher Schwestern besuchten, meinte er: „Gestern waren meine Heidelberger Enkelkinder da, jetzt kann ich mich ausruhen.“ Nach seinem bewegten Leben hatte er die Ruhe wohlverdient: Er war stets um seine große Familie bemüht – und dazu zählte er wohl auch seine Mitarbeiter – er hatte aber meist auch ein speziell angefertigtes Brett bei sich, um auf dieser Unterlage seine Ideen zu Papier bringen zu können. Am liebsten tat er dies in der Veranda seiner Wohnung in der Innsbrucker Kochstraße unter der Fürsorge seiner bemühten Gattin.
Doch nun etwas systematischer zu Gröbners Lebenslauf:

Bildnis W. Gröbners von R. Liedl

Er wurde am 11. Februar 1899 in Gossensaß an der Südtiroler Seite des Brennerpasses geboren und wuchs dort mit vier Geschwistern auf. Nachhaltige Auswirkungen auf sein späteres Leben hatte das Jesuiteninternat in Feldkirch. 1917 mußte er an die italienische Front und nach Kriegsende begann er ein Maschinenbaustudium an der Technischen Universität in Graz. Gegen Ende dieses Studiums kam es zu einer dramatischen Wende in Gröbners Weltanschauung: Einer seiner Brüder verunglückte an einem Sonntagnachmittag mit dem Motorrad tödlich, ohne am Vormittag einen Gottesdienst besucht zu haben. Die drohende

[1]Vergleiche auch den Vortrag von R. Liedl anläßlich des Kolloquiums 100 Jahre Gröbner `http://mathematik.uibk.ac.at/archiv.html` und die Laudatio von E. Hlawka aus Anlaß des 80. Geburtstags Gröbners IMN 124 (1980), 74–80 (fälschlicherweise dort Laudatio aus Anlaß der Emeritierung des Jubilars genannt!)

ewige Verdammnis für seinen geliebten Bruder stürzte den Stella-Matutina-Absolventen in eine schwere seelische Krise – es kam zum Abbruch des Technikstudiums und zum Bruch mit der katholischen Kirche. Sein faustisches Suchen nach einer Religiosität ohne Zwänge beschreibt er ein Jahrzehnt später in seinem ersten Buch *Der Weg aufwärts* [98] – und in den frühen sechziger Jahren in den Neujahrsthesen und seinen Seminaren über Grenzprobleme, die ihn in ernsthafte Schwierigkeiten mit der Innsbrucker Theologischen Fakultät brachten! Vgl. P. Goller und G. Oberkofler *... daß auf der Universität für die Lehre, die dort vertreten wird, wirkliche Gründe gegeben werden*. [20]

Die für uns wichtigste Spätfolge bleibt jedoch: Gröbner begann 1929 – nach seiner Verehelichung – mit dem Mathematikstudium an der Universität Wien, weil „*die Mathematik die wahrhaft königliche Wissenschaft sei, die einzig und ausschließlich auf eigene Einsicht gegründet ist, die konsequent jede fremde Autorität außerhalb des eigenen Verstandes ablehnt und niemals etwas deshalb zu glauben vorschreibt, weil es irgendwer irgendwo irgendeinmal gesagt habe*“. (Österr.Hochschulzeitung 1958) Gröbners beeindruckendste Lehrer waren W. Wirtinger und Ph. Furtwängler – aber auch er machte Eindruck: Wirtinger hebt in seiner Arbeit *Eine Determinantenidentität und ihre Anwendungen* Gröbners wichtigen Beitrag im Seminar 1933/34 hervor. Gröbners Disertation bei Furtwängler im Jahre 1932 trägt den Titel *Ein Beitrag zum Problem der Minimalbasen* und erscheint 1934 in den Monatsheften [137] (zuvor 1932 schon kurz angezeigt [146]).

Auf Empfehlung Furtwänglers ging G. gleich nach der Promotion nach Göttingen, um die Vorlesungen von Emmy Noether zu hören. Bereits zu Weihnachten konnte er in einem Brief aus Gossensaß der „*sehr verehrten Frau Professor*“ die Lösung einer Problemstellung über irreduzible Ideale skizzieren, die dann zu der meiner Meinung nach bedeutendsten Arbeit Gröbners [147] führte, auf die wir im nächsten Abschnitt eingehen werden.

G. entschuldigt sich auch gleich bei Noether, daß er im Jänner 1933 „*hauptsächlich aus materiellen Gründen*“ wieder nach Österreich zurück möchte. Er konnte aber keine Stelle an einer Universität bekommen und wirkte bis 1936 als Privatgelehrter, der unter anderem Kleinkraftwerke baute, in Gossensaß, wo er im Herbst im väterlichen Hotel zufällig mit Prof M. Picone zusammentraf, der dort seine Ferien verbrachte. Dies führte schließlich zu einer Anstellung an dessem Institut für angewandte Mathematik in Rom. Da er als Südtiroler für Deutschland optierte, mußte G. 1939 Rom wieder verlassen und wurde nach einer kurzfristigen Tätigkeit bei der Preußischen Akademie der Wissenschaften im Rahmen der Redaktion der *Fortschritte der Mathematik* in Berlin als Äquivalent zu seiner römischen Position als „Ordentlicher Konsulent“ am 31. 10. 1941 zum Extraordinarius an der Universität Wien ernannt. Allerdings mußte er kurz darauf zum Wehrdienst einrücken, wurde aber am 19. 6. 1942 UK-gestellt und mit dem Aufbau eines *Luftwaffeninstituts zur Anwendung höherer mathematischer Methoden auf Probleme der Luftfahrttechnik* unter Leitung des Freiburger Mathematikers G. Doetsch mit vorläufigem Sitz in Braunschweig betraut. Die von G. geleitete Arbeitsgruppe *Industriemathematik* erstellte Integraltafeln aber auch einen *Vergleich der zu erwartenden Trefferwahrscheinlichkeit von MG und Schrapnellrakete im Luftkampf*.

Prof. Hlawka erinnert sich an einen Besuch in Braunschweig: „*Das Essen an dieser Anstalt war selbst für die damaligen Verhältnisse entsetzlich, aber die Unterhaltung mit G. und den Kollegen, so mit Prof. Peschl, ist mir in lebhafter und schöner Erinnerung*“.

1945 kann sich Gröbner rechtzeitig zu seiner Familie nach Tirol absetzen – kann aber nach Kriegsende nicht gleich nach Wien: „*Nach dem Ausscheiden der beiden ordentlichen Professoren des Faches besitzt die Fakultät nur mehr die beiden Extraordinariate, derzeit eingenommen durch Dr. Wolfgang Gröbner und Dr. Nikolaus Hofreiter. Auch diese beiden standen der Fakultät während des Sommersemesters 1945 und des Wintersemesters 1945/46 nicht zur Verfügung, da Prof. Gröbner sich noch immer jenseits der Demarkationslinie in Tirol aufhält, Prof. Hofreiter .... Der Dekan hat Prof. Gröbner, der nicht Angehöriger der NSDAP ist, beauftragt, mit Beginn des Sommersemesters 1946 sein Lehramt anzutreten; ob es ihm möglich sein wird, rechtzeitig einzutreffen, ist fraglich*“ [20]. G. traf dann doch in Wien ein, nahm aber 1947 „*zu unser aller großem Bedauern*“ (E. Hlaw-

ka) ein Ordinariat in Innsbruck an. Es war dies eine Art Personalrochade, da J. Radon, den es zu Kriegsende unter Mithilfe von Prof. Vietoris nach Innsbruck verschlagen hatte, am 24. 1. 1947 zum Ordinarius in Wien ernannt wurde. Im Gegenzug stand im Innsbrucker Besetzungsvorschlag W. Gröbner primo loco:
„*Gröbner gilt als guter Lehrer und ist politisch unbelastet*“.
Ganz frei vom Geist der damaligen Zeit war aber auch er nicht gewesen, wie aus einem Brief vom 5. 9. 1944 an G. Doetsch hervorgeht:
„*Der Schrecken über die jüngste unglückliche Entwicklung der Kriegslage in Frankreich ist mir ordentlich in die Glieder gefahren. Ich hoffe, daß es trotz allem gelingen wird, das Schicksal zu bezwingen und unser Vaterland zu erretten. Ich bleibe selbstverständlich mit allen Kräften auf meinem mir zugewiesenen Posten, bin aber sofort zu einem anderen Einsatz bereit, falls dies verlangt werden sollte. Ein Weiterleben über eine etwaige Niederlage hinaus würde mir absolut wertlos erscheinen*“. [20]
Dabei hatte er noch 1935 geschrieben: „*Die Seele ist autonom, keine äußere Macht kann ihr gebieten*“.

Sein verdienstvolles Wirken in Innsbruck bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1970 wird aus den folgenden Abschnitten über sein wissenschaftliches Werk ersichtlich sein.
In den Jahren danach trafen wir uns jeden Mittwoch zu einem Arbeitsessen – bis wir schließlich in seinem letzten „Stammlokal“, einem renommierten Hotel in der Nähe seiner Wohnung, Lokalverbot bekamen: G. hatte nämlich seit einem Magendurchbruch nur mehr einen Teil des Magens, was er durch ein Glas Rotwein auszugleichen versuchte – falls es aber mehr wurde, konnte er recht aufbrausend werden und dazu kam seine Schwerhörigkeit – ich konnte das Hotelpersonal fast verstehen. Dennoch: *Der Prophet gilt offenbar nichts im eigenen Land!*
Ein Schlaganfall zwang ihn dann 1980 ins Krankenbett, wo er sich in großer Würde und Güte – wie eingangs erwähnt – von den Seinen verabschiedete, eine seiner Töchter war ihm bereits vorausgegangen.

2 Irreduzible Ideale – Gröbner-Dualität

Zu Gröbners von E. Noether angeregter Untersuchung der irreduziblen Ideale in kommutativen Ringen [147] lassen wir am kompetentesten Emmy Noether selber zu Wort kommen:

by Carmichael [Bull. Amer. Math. Soc. **22**, 111 (1915)] for $n = 3$. *MacDuffee.*

Gröbner, Wolfgang: Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen. Math. Ann. **110**, 197—222 (1934).

Irreduzible Ideale sind solche, die sich nicht als Durchschnitt echter Teiler darstellen lassen. Für diese hatte Macaulay [Math. Ann. **74** (1913) und Cambridge Tracts **19** (1916)] im Fall des Polynombereichs — unter anderer Definition — interessante aber schwer zugängliche Resultate vermöge seines „inversen Systems“ gewonnen. — Hier wird eine einfache und allgemeine Theorie entwickelt, für beliebige kommutative Ringe mit Teilerkettenbedingung gültig; die ersten Ansätze dazu lagen in (unveröffentlichten) Notizen von Ref. vor. Im Mittelpunkt stehen die verschiedenen Charakterisierungen der irreduziblen Ideale: Ein Primärideal $\mathfrak{q}$ zu Primideal $\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann irreduzibel, wenn jeder primäre, zu $\mathfrak{p}$ gehörige Teiler $\mathfrak{a}$ Quotient ist; $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}:\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}:\mathfrak{a}$. Oder damit gleichbedeutend: Wenn mit einer Kompositionsreihe aus den eben charakterisierten $\mathfrak{a}_i$ jeweils auch die Quotienten $\mathfrak{q}:\mathfrak{a}_i$ eine Kompositionsreihe bilden. Vermöge dieser Charakterisierung ergibt sich als das allgemeine Äquivalent des „inversen Systems“ eine eineindeutige Abbildung der Ideale $\mathfrak{a}$, indem jedem $\mathfrak{a}$ der Quotient $\mathfrak{q}:\mathfrak{a}$ als „inverses Ideal“ zugeordnet wird. Die dabei geltenden Gesetzmäßigkeiten sind dieselben, die Dedekind zuerst beim Übergang von Modul zu Komplementärmodul betrachtet hat. Diese Abbildung ergibt allgemeine Sätze über irreduzible Ideale und Durchschnitt solcher gegenseitig primar (reguläre Ideale); z. B. Beziehungen zwischen Anzahl der Basiselemente und irreduzibler Komponenten des inversen Ideals; Beziehungen zwischen Anzahl der Basiselemente von $\mathfrak{p}^i$ und $\mathfrak{p}^{\varrho-i-1}$ (ϱ Exponent von $\mathfrak{q}$) usw. Der Schluß bringt ein Kriterium dafür, daß ein Hauptideal regulär sei. *E. Noether* (Bryn Mawr).

Zbl.-Referat 009.29004 (Copyright © by Springer Verlag)

$\mathbf{a} = \mathbf{b} \cap \mathbf{c}$ mit $\mathbf{a} \subset \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} \subset \mathbf{c}$ nennt man reduzibel; ist dies nicht möglich, so heißt das Ideal $\mathbf{a}$ irreduzibel.

Bsp. In $\mathbf{Z}$ ist das Ideal $(10) = (2) \cap (5)$ reduzibel, die Ideale $(2)^2$ und $(5)^3$ irreduzibel, in $\mathbf{C}[x_1, x_2]$ ist $\mathbf{q} = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2) = (x_1^2, x_2) \cap (x_1, x_2^2)$ als Durchschnitt zweier echter Teiler ein reduzibles Primärideal. Die beiden Teiler sind nun aber irreduzible Primärideale.

Die von G. entwickelte Dualitätstheorie irreduzibler Ideale mündet ebenso wie die Pontrjaginsche und die Grothendiecksche in die *Matlis-Dualität*.

Auch W. Krull hat den Wert der Gröbnerschen Arbeit sofort erkannt und sie in seinem Enzyklopädieartikel über die *Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie* ausführlich referiert.

3 Struktur der Primärideale – Gröbner-Korrespondenz

Ein zentrales Anliegen Gröbners war es, die Struktur von Primäridealen durch Differentialbedingungen zu charakterisieren. Zugrunde liegt die einfache Idee, die Vielfachheit einer Nullstelle eines Polynoms in einer Variablen durch die Ableitung auszudrücken:

$$x_0 \text{ Nullst.Vielfachh. } k \text{ von } f \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0, f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

Begonnen hatte er damit in der zweiten Annalenarbeit [151] mit Primidealen – dort wird mit der *Primbasis* übrigens auch ein Beispiel einer Gröbnerbasis (siehe 8) untersucht – das Problem in [80] bzw. [136] für Primärideale formuliert und es zum Teil in [127] gelöst.

Für diesen Fall führten M.G. Marinari, H.M. Möller und T. Mora 1966 die Bezeichnug *Gröbner duality* ein [42].

Siehe U. Obersts umfassende Darstellung [49].

H. Hauser und G. Müller definieren 1993 eine Zuordnung zwischen Untervarietäten des affinen Raums und *geometrischen* Unteralgebren der Liealgebra aller Vektorfelder und nennen sie *Gröbner- Korrespondenz* [23].

4 Multiplizität – Syzygien

Schon beim Hauptsatz der Algebra muß man die Nullstellen mit ihrer Multiplizität zählen, um über $\mathbf{C}$ für ein Polynom n-ten Grades n Nullstellen zu erhalten. Der Schnitt höherdimensionaler Varietäten erfordert, um die *richtige* Anzahl an Schnittpunkten zu erzwingen, entweder eine *dynamische* Vorgangsweise (wie etwa in der Topologie: Man *verwackelt* die Situation ein wenig) oder eine mehr *statische* Betrachtung: Man legt die Multiplizität eines Primärideals (durch Macaulay's Länge) ein für alle mal fest und verzichtet auf die Allgemeingültigkeit des sog. *Bezoutschen Satzes*.
Die anfangs umkämpfte Entwicklung des Gröbnerschen statischen Standpunkts in Zusammenarbeit mit den Hallenser Algebraikern unter Führung des leider allzu früh verstorbenen Wolfgang Vogel hat zuletzt H. Flenner vorbildlich dargestellt.[2]
Hinsichtlich der Kontroversen zwischen P. Dubreil und Gröbner um die Syzygientheorie und die Charakterisierung *perfekter* Ideale siehe Matutat-Renschuch [43].

5 Schnellschüsse

Obwohl Gröbner beim Rechnen kaum Fehler unterliefen – es tauchen kaum Korrekturen für die Integraltafeln [133],[134] auf (siehe [14]) – war er bei manchen theoretischen Überlegungen etwas voreilig:
1956 hatte er eine *Auflösung der Singularitäten einer algebraischen Varietät* angekündigt, die aber in der Rezension in den Math.Rev. von P. Abellanas ziemlich zerzaust wurde. Dies ging aber andern ebenso – vgl. meine Notiz [51].
Eine längere derartige Episode rankt sich um das Jacobi-Kellersche Umkehrproblem polynomialer Abbildungen:
Als ich im WS 63/64 erstmals bei Prof. Gröbner mitarbeiten durte, stellte er mir die harmlos klingende Aufgabe, die polynomialen Lösungen

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad \text{der partiellen Dgl.} \quad u_x v_y - u_y v_x = 1$$

zu untersuchen, insbes. zu prüfen, ob sie polynomiale Umkehrungen besäßen:
Analog zum trivialen eindimensionalen Fall kommt man rasch auf die lineare Lösung

$$u = a + bx + cy, \quad v = d + ex + fy \qquad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = 1$$

Auch die folgende quadratische Lsg. ist wohlbekannt und spielt neben ihrer quadratischen Inversen eine wichtige Rolle in der Theorie dynamischer Systeme:

$$u = x\cos a - (y - x^2)\sin a, \quad v = x\sin a + (y - x^2)\cos a, \qquad \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$$

Ich kam bald darauf, daß Gröbners Frage nach der Umkehrbarkeit einer volumserhaltenden polynomialen Transformation O.H. Kellers Jacobi-Vermutung war, die für G. aktuell war, weil 1955 W. Engel einen *vermeintlichen* Beweis mit Hilfe der Gröbnerschen *Lie-Reihen-Methode* (siehe 6) gegeben hatte, in dem aber Vitushkin später zwei Fehler entdeckte. Weiters hatte B. Segre 1956 drei unvollständige *Beweise* publiziert und nach einem rein algebraischen Beweis gefragt, den G. 1961 prompt lieferte [117]– leider entdeckte O. Zariski darin eine fehlerhafte Formel.
Die Veröffentlichung eines zweiten inkorrekten Gröbnerschen Beweises konnte ich – der ich nun ja hinzu gestoßen war, gerade noch verhindern: G. wollte seine Arbeit für eine Festschrift zu Ehren Segres abschicken, da kam mir W. Kaup, der zu einem Vortrag in

[2] Wolfgang Vogel's contributions to intersection theory
`http://www.mathematik.uni-halle.de/history/vogel/index.html`

Innsbruck zu Gast war, zu Hilfe: Mir war nämlich aufgefallen, daß die Gröbnersche Argumentationsweise auch für ganz transzendente Abbildungen *richtig* sein müßte – Kaup verwies mich aber auf das injektive Gegenbeispiel von Bieberbach.
1990 hat van den Essen [59] die Frage nach der polynomialen Invertierbarkeit mit reduzierten Gröbner-Basen verknüpft und 1994 [60] wieder aufgegriffen – dabei aber Gröbners Ergebnisse über eine Inversionsformel mit Hilfe der Lie-Reihen-Methode (siehe 6) nicht gekannt (vgl. meine Note[50])
Siehe auch S. Ahhyankar-W. Li [1]
Unklare Formulierungen enthält auch Gröbners allerletzte Arbeit: *Galoistheorie* [131]. Vgl. K. Girstmair-U. Oberst [19].

6 Differentialgleichungen und Lie-Reihen

In einem Brief vom 4. 3. 1943 von Gröbner an Doetsch kündigte sich ein weiterer Forschungsschwerpunkt an:
„Als eine der dringendsten Aufgaben für die theoretische Forschung würde ich die ansehen, systematisch die Untersuchung der nichtlinearen Differentialgleichungen aufzunehmen. Beinahe alle Probleme, wo man sich nicht mehr mit den allerersten Annäherungen begnügen darf, führen auf nichtlineare Dgln. und hier liegt fast noch gar nichts an theoretischer Forschung vor".
Ab dem Jahre 1958 begann G. sich damit systematisch auseinanderzusetzen!
Er knüpfte bei der Darstellung der Lösung einer Anfangswertaufgabe für ein System gewöhnlicher Dgln.

$$(*) \qquad \dot{x} = f(x), \;\; x(t_0) = x_0$$

bei Sophus Lie an:
G. Kowalewski schreibt in seiner *Einf. in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen*: *Wir beginnen mit einer Betrachtung, bei der S. Lie in seinen Vorlesungen besonders gern verweilte: Die Reihenentwicklung der Lsg. von (*) schreibt man am besten in der symbolischen Gestalt*

$$(**) \qquad x(t) = e^{tV} x|_{x=x_0}, \;\; \text{wobei} \;\; V := \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Gröbner schrieb lieber

$$e^{tD}$$

und unter diesem *Logo*, das an das vertraute Matrixexponential im linearen Fall konstanter Koeffizienten erinnerte, initiierte er – zunächst gemeinsam mit dem theoretischen Physiker F. Cap ein Forschungsprogramm und konnte *Drittmittel* von der NASA und US Army sichern und uns als Mitarbeiter anstellen.
Zur Computerimplementierung obiger Formel wurde zunächst nach Rekursionsformeln für die Operatorpotenzen gesucht (vgl. G. Wanner [64])
G. hatte aber auch die fundamentale Idee, den Operator D zu zerlegen:
$D = D_1 + D_2$, wo man nach gutem alten Rezept astronomischer Störungsrechnung in D_1 den bekannten Hauptteil des Problems verpacken und D_2 als Störung ansehen konnte. G. bewies mit diesen im allgemeinen nicht kommutativen Operatoren D_1 und D_2 die *Störungsformel*

$$e^{tD} z_i = e^{tD_1} z_i + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-\tau)^m}{m!} [D_2 D^m z_i] d\tau,$$

die ein überaus genaues numerisches Verfahren (mit dem Restglied nach H. Knapp) lieferte, das 1968 im Forschungszentrum in Madison einem Härtetest unterzogen wurde. (Vgl. H. Knapp – G. Wanner [31].

Später konnten wir den Zusammenhang mit einer zur selben Zeit von V.M. Alekseev gefundenen Integralgleichung herstellen (Siehe [63]).
Um 1980 wurden dann die *Lie-Reihen* von M. Fliess auf den Fall nicht kommutativer Variablen verallgemeinert und auf Fragen der Systemtheorie angewandt. [16],[30]
Ein Spezialfall dieser *Fliess-Reihen*, der auf Chen zurückgeht, läßt sich auch aus der Störungsformel gewinnen. (Vgl. Diss. K. Kuhnert)

Ein rein kombinatorischer Zugang zu den Lie-Gröbner-Fliess-Chen-Reihen mit Hilfe von *Wurzelbäumen*, die schon auf Cayley zurückgehen, wird einerseits seit 1985 von einer Gruppe um G. Labelle [33],[34] verfolgt – vgl. den sehr gut lesbaren jüngst erschienenen Artikel von R.Winkel [65]. Im 2. Kapitel: *Basic Theory of Lie series* gibt W. eine empfehlenswerte Zusammenstellung der Ergebnisse des Gröbnerschen Buches [115].
Es wird auch Gröbners mehrdimensionaler Fall

$$e^{t_1 D_1 + \ldots + t_M D_M} x|_{x=\bar{x}}$$

behandelt, also eine Lie-Reihe mit Koeffizienten in $R[t_1, ..., t_M]$ anstelle von R, und auf deren Anwendung zur Inversion einer Potenzreihenabbildung eingegangen (siehe 5).
Vergleiche auch die Arbeiten einer Gruppe russischer Autoren [41], [28].
Andrerseits ist in der Numerik seit 1963 der kombinatorische Zugang zu den Runge-Kutta-Verfahren durch J.C. Butcher der Standard [8], E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner [22].
Siehe auch das Mathematica package *Butcher.m* und M. Sofroniou [57].
Die sich für die höheren Ableitungen $y^{(n)}(x)$ von

$$y'(x) = f(y(x))$$

mit Hilfe der Kettenregel (nach Faà di Bruno – vgl. auch [27]) ergebenden Ausdrücke nennt Butcher *elementare Differentiale* und zeigt, wie man sie aus *indizierten Wurzelbäumen* gewinnen kann. Macht man dies ebenso für die Runge-Kuttasche Näherungslösung – der Einfachheit halber etwa für ein zweistufig explizites Verfahren

$$y_n = y_{n-1} + h(b_1 f(y_{n-1}) + b_2 f(y_{n-1} + h a_{21} f(y_{n-1})))$$

erhält man die zentralen Begingungsgleichungen für ein Verfahren einer bestimmten Ordnung. (Über deren Lösung mit Gröbner-Basen siehe [57].)
1995 führt uns nun H. Munthe-Kaas in seiner Arbeit: *Lie-Butcher Theory for Runge-Kutta Methods* [44] wieder an den Ausgangspunkt zurück:
Wenn man neben $e^{tD} f$ auch

$$e^{tD} F = F + \frac{t}{1!}[D, F] + \frac{t^2}{2!}[D, [D, F]] + \ldots$$

für ein Vektorfeld F und Lieklammern $[,]$ betrachtet und den Kommutatoren ebenfalls *Butcherbäume* zuordnet, erhält man auf elegante Weise die oben erwähnten Bedingungsgleichungen!
Vgl. dazu auch M. Fritsche-H. Toparkus [17]: *Using the Lieseries method of Grobner a new method for the derivation of the consistency conditions ... is presented (S. Filippi).*
Bzgl. strukturerhaltender Integrationsmethoden und Lie-Reihen siehe etwa P.V. Koseleff [32] und J.S. Griffith [21].
Weitere Ergebnisse einer Gruppe russischer Mathematiker, die zunächst ausgehend von Filatov und Bondarenko in Taschkent mit Gröbners Lie-Reihen-Methode arbeitete, finden sich in [28].
Bezüglich Lie-Reihen und stochastischer Dgln. siehe [37].
Was die Anfangszeit des *Lie-Projekts* betrifft möchte ich abschließend bei den Physikerkollegen noch Abbitte leisten: Wir hatten immer gemeint, die Physiker machen sich 's leicht

und rechnen nur Einzelbeispiele: Kollege A. Schett hatte zunächst verschiedene lineare Dgln. zweiter Ordnung mit Lie-Reihen untersucht, 1977 aber das quadratische System

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = zx, \quad \dot{z} = xy; \qquad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0$$

angegangen und dabei überaus bemerkenswerte Relationen für die Koeffizienten der Jacobischen elliptischen Funktionen gefunden, die dann auch mit dem schon erwähnten kombinatorischen Zugang Labelles reproduziert wurden.

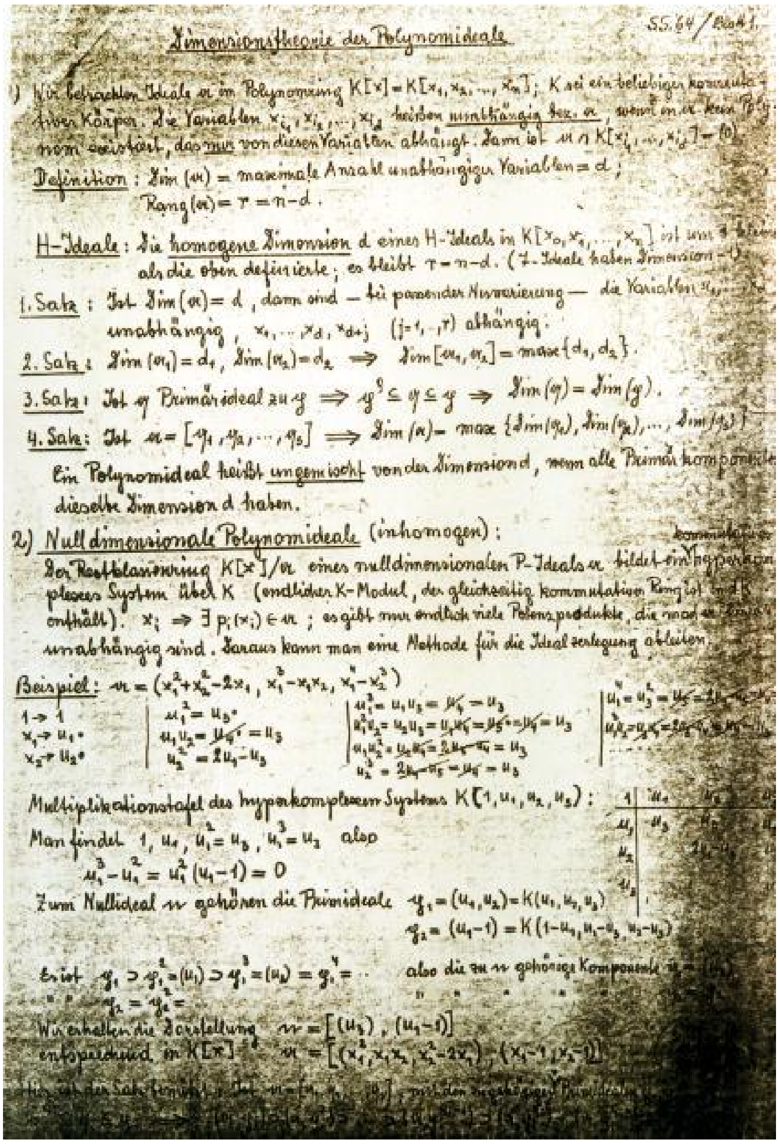
7 Orthogonale Polynome – Mathematik für Physiker

Seit der Zeit bei Picone in Rom faszinierte Gröbner die Konstruktion orthogonaler Polynomsysteme mit Hilfe eines Extremalprinzips. P. Lesky hat dies fortgeführt und erweitert. [3] Erwähnenswert ist, daß er jüngst die Dissertation, die G. Sonderegger unter Gröbners Anleitung 1965 ausgearbeitet hat, aufgegriffen hat und mit dem nun seit über 35 Jahren an einem Vorarlberger Gymnasium tätigen Kollegen eine gemeinsame Arbeit verfaßt hat [35].
Nicht vergessen sollte man Gröbners Bücher *Mathematische Methoden der Physik* [135], *Differentialgleichungen* [129] und *Matrizenrechnung* [122], die Klassiker der Lehrbuchliteratur waren.

8 Gröbner-Basen und Gröbner-Deformationen

Wenn man im MathSciNet unter *Anywhere* nach Grobner sucht, erhält man derzeit gegen 1500 Einträge – mehr als 90 % davon betreffen *Gröbner-Basen*.
Wir wollen uns nun das Fundament dieses Denkmals, das Bruno Buchberger mit dieser Bezeichnung seinem Lehrer setzte, etwas näher ansehen:
Im Sommersemester 1964 begann G. in seinem Dissertantenseminar über *Dimensionstheorie der Polynomideale* mit nulldimensionalen Polynomidealen:

[3] Vgl. den Vortrag anläßlich des Kolloquiums 100 Jahre Gröbner
`http://mathematik.uibk.ac.at/archiv.html`



SS 64/Blatt 1

Dimensionstheorie der Polynomideale

1) Wir betrachten Ideale $\mathfrak{a}$ im Polynomring $K[x]=K[x_1,x_2,\dots,x_n]$; K sei ein beliebiger kommutativer Körper. Die Variablen $x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_d}$ heißen unabhängig bez. $\mathfrak{a}$, wenn in $\mathfrak{a}$ kein Polynom existiert, das nur von diesen Variablen abhängt. Dann ist $\mathfrak{a}\cap K[x_{i_1},\dots,x_{i_d}]=(0)$.

Definition: $\mathrm{Dim}(\mathfrak{a})$ = maximale Anzahl unabhängiger Variablen $= d$;
$\mathrm{Rang}(\mathfrak{a}) = r = n-d$.

H-Ideale: Die homogene Dimension d eines H-Ideals in $K[x_0,x_1,\dots,x_n]$ ist um 1 kleiner als die oben definierte; es bleibt $r=n-d$. (1-Ideale haben Dimension -1)

1. Satz: Ist $\mathrm{Dim}(\mathfrak{a})=d$, dann sind – bei passender Numerierung – die Variablen $x_1,\dots,x_d$ unabhängig, $x_1,\dots,x_d,x_{d+j}$ $(j=1,\dots,r)$ abhängig.

2. Satz: $\mathrm{Dim}(\mathfrak{a}_1)=d_1$, $\mathrm{Dim}(\mathfrak{a}_2)=d_2$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Dim}[\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2]=\max\{d_1,d_2\}$.

3. Satz: Ist $\mathfrak{q}$ Primärideal zu $\mathfrak{p}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}^g\subseteq\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Dim}(\mathfrak{q})=\mathrm{Dim}(\mathfrak{p})$.

4. Satz: Ist $\mathfrak{a}=[\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\dots,\mathfrak{q}_s]$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Dim}(\mathfrak{a})=\max\{\mathrm{Dim}(\mathfrak{q}_1),\mathrm{Dim}(\mathfrak{q}_2),\dots,\mathrm{Dim}(\mathfrak{q}_s)\}$

Ein Polynomideal heißt ungemischt von der Dimension d, wenn alle Primärkomponenten dieselbe Dimension d haben.

2) Nulldimensionale Polynomideale (inhomogen):

Der Restklassenring $K[x]/\mathfrak{a}$ eines nulldimensionalen P-Ideals $\mathfrak{a}$ bildet ein hyperkomplexes System über K (endlicher K-Modul, der gleichzeitig kommutativer Ring ist und K enthält). $x_i \Rightarrow \exists\, p_i(x_i)\in\mathfrak{a}$; es gibt nur endlich viele Potenzprodukte, die mod $\mathfrak{a}$ linear unabhängig sind. Daraus kann man eine Methode für die Idealzerlegung ableiten.

Beispiel: $\mathfrak{a}=(x_1^2+x_2^2-2x_1,\ x_1^3-x_1x_2,\ x_1^4-x_2^3)$

Multiplikationstafel des hyperkomplexen Systems $K(1,u_1,u_2,u_3)$:

Man findet $1, u_1, u_1^2=u_3, u_1^3=u_3$ also
$u_1^3-u_1^2=u_1^2(u_1-1)=0$

Zum Nullideal $\mathfrak{a}$ gehören die Primideale $\mathfrak{p}_1=(u_1,u_2)=K(u_1,u_2,u_3)$
$\mathfrak{p}_2=(u_1-1)=K(1-u_1,u_1-u_3,u_2-u_3)$

Wir erhalten die Darstellung $\mathfrak{a}=[(u_3),(u_1-1)]$
entsprechend in $K[x]$: $\mathfrak{a}=[(x_1^2,x_1x_2,x_2^2-2x_1),(x_1-1,x_2-1)]$

Gröbners Seminarunterlage SS 64

Das Verfahren liefert eine Basis der Polynomalgebra $K[x]/\mathbf{a}$. Aus der Multiplikationstafel läßt sich auch ein bemerkenswertes neues Erzeugendensystem für das Ideal $\mathbf{a}$ rückgewinnen:

$$\mathbf{a}=(x_1^2+x_2-2x_1, x_1x_2-x_1^2, x_1^3-x_1^2)$$

Auf den ersten Blick sieht man, daß einige Potenzen niedriger sind als im gegebenen EZS, auf den zweiten Blick fällt jedoch auf, daß eines der erzeugenden Polynome nur mehr x_1 enthält – wir haben mit der *graduiert-lexikographischen Ordnung* der Monome, von der Gröbner ausging, eine *Eliminationsordnung* erwischt und die Frage nach der Nullstellenberechnung für das Ideal auf eine einzige Variable zurückgeführt!

B. Buchberger, der an der neuen ZUSE 23 arbeitete, übernahm es als Dissertationsthema, zunächst das Gröbnersche Verfahren zu programmieren und vor allem herauszufinden, wann man das Verfahren abbrechen kann. Bei diesen Untersuchungen entwickelte er die für das Weitere entscheidende Idee der *S-Polynome* und bewies, dass es genügt, die Reduktion der *endlich vielen* S-Polynome auf 0 zu untersuchen. Daraus ergab sich ein neuer, immer terminierender Algorithmus, der eine Idealbasis liefert, die Buchberger später

Gröbner-Basen nannte und die - auch unabhängig von der Art, wie sie konstruiert werden - Grundlage für die algorithmische Lösbarkeit einer großen Anzahl fundamentaler Probleme in der Theorie der Polynomideale bilden. Er wagte sich gleich an ein Beispiel in drei Variablen: Heute etwa als MAPLE-Befehlsfolge geschrieben:

$$with(Groebner) : WL := [x^2-2y+x, x*z-z, z^3-2z+y] : gbasis(WL, tdeg(z, y, x));$$

$$[x^2 - 2y + x, xy - y, xz - z, y^2 - y, zy - z, z^3 - 2z + y]$$

Hier ist das neue EZS schon doppelt so lang. Beachtenswert ist jedoch: Die *Leitmonome* aller Polynome im Ideal sind Vielfache von Leitmonomen der Elemente des neuen EZS.
Die entscheidenden Überlegungen Buchbergers, wie man durch Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von Leitmonomen zu *S-Polynomen* kommt, die man allenfalls zum EZS hinzunehmen muß, beginnen in der Dissertation auf der Seite 24. Just davor hört aber Gröbner mit der Lektüre auf und beauftragt G. Wanner mit der kritischen Prüfung des 2. Teils!
Buchberger promoviert am 16. Juli 1966 (ich weiß dies so genau, weil wir es gemeinsam hinter uns brachten) und erst 5 Jahre nach Einreichung der Diss im Herbst 1965 erschien die gedruckte Fassung der Arbeit [7].
Hironaka hatte zur selben Zeit die Existenz von analogen *Standardbasen* im Potenzreihenring gezeigt.
Daß G. sein Verfahren schon 1949 in der Arbeit *Über die Eliminationstheorie*[75] viel ausführlicher dargestellt hatte – versehen mit einem nahezu vollständigen Programm für dessen Anwendungen – wurde uns erst viel später bewußt: Er schreibt darin, *diese Methode seit etwa 17 Jahren in den verschiedensten, auch komplizierten Fällen verwendet und erprobt zu haben und glaube auf Grund seiner Erfahrungen sagen zu können, daß sie tatsächlich in allen Fällen ein brauchbares und wertvolles Werkzeug zur Lösung von diesen und ähnlichen idealtheoretischen Aufgaben darstellt.* [4]
Eine dieser früheren *Erwähnungen* hatte ich 1990 zufällig entdeckt, als ich einen Vortrag zum Gedächtniskolloquium für Ott-Heinrich Keller vorbereitete:
Gröbners Arbeit *Über die algebraischen Eigenschaften der Integrale von linearen Dgln. mit konstanten Koeffizienten* [152] stand neben der Kellerschen Arbeit über das Jacobische Umkehrproblem (siehe 5) – beide Ph. Furtwängler zum 70. Geburtstag gewidmet. Zu den darin von G. vorgeschlagenen Ideen einer *algebraischen Analysis* siehe die Arbeiten von U. Oberst [48, 45, 46, 47] und zum Zusammenhang mit Additionstheoremen meinen Vortrag (gem. mit U. Oberst) über *Darstellungen von Liealgebren, part. Dgln. und Funktionalgleichungen* beim Mathematikertreffen 1999 in Graz.
Als ich in Halle über Gröbners Arbeit berichtete, erzählte mir Bodo Renschuch über seinen *Beitrag zur konstruktiven Theorie der Polynomideale XXIII: Vergessene Arbeiten des Leningrader Mathematikers N.M. Gjunter* [53, 52] und daß darin auch so ähnliche Basen vorkommen!
Heute glaube ich, daß Gjunter um 1913 – zu E. Delassus (1897) etwas später! – der erste war, der nahezu fehlerfrei Riquier-Janets *involutive Basen für Differentialoperatoren* auf Fragen zur Struktur von Polynomidealen anwandte.
Doch halt – schön der Reihe nach zunächst zum Fall nichtkommutativer (assoziativer) Algebren!
V.A. Ufnarowskij gibt in seinem Enzyklopädieartikel [58] eine gut lesbare Darstellung: *Normal Words and a Gröbner Basis of an Ideal of a Free Algebra* zur Frage nach einem *vollständigen System von Relationen* in der Faktoralgebra A/I (in Analogie zum Restklassenring nach einem Polynomideal). Zur Konstruktion benötigt man drei Operationen: Normalisierung, Reduktion und *Komposition*. Das zentrale Kompositionslemma heißt bei Bergman 1978 *diamond lemma*. Zuerst hatte aber 1962 im Kontext von Liealgebren A.I.Shirshov eine derartige Konstruktion im Auge.

[4] Vgl. auch Macaulays Ansatz in der Arbeit [38] aus dem Jahre 1927

Eng damit zusammen hängen auch *Termersetzungsverfahren*, die Knuth-Bendix-Vervollständigung und die Church-Rosser-Eigenschaft [40].
Weitaus älter aber sind ähnliche Ideen in Ringen von Differentialoperatoren:
Aufbauend auf Méray und Riquier hat Etienne Delassus in seiner Arbeit: *Extension du théorème de Cauchy...*[12] einen Vervollständigungsprozeß für Differentialgleichungen beschrieben, der zu einer geeigneten kanonischen Form des Systems führt. Ein Jahr später wendet er dies auf algebraische Gleichungen an [13]: Er schreibt schlicht und einfach: *La méthode que j' ai récemment indiquée pour la reduction des systèmes differentiels le plus généraux à une forme canonique peut, sans modifications importantes, s' applique aux systèmes d' équations algèbriques.*
Nun, es waren doch Modifikationen nötig: Gjunter entdeckt nämlich einen Fehler bei Delassus und korrigiert ihn durch seine *normierten Mengen*, 1924 führt M. Janet in [29] – ohne Delassus zu erwähnen direkt seine *involutorischen Mengen* ein, die die normierten als Spezialfall enthalten.
Die Delassussche Theorie ist übrigens in der französischen Ausgabe der Enzyklopädie I 9.71 p. 164 im Artikel von Netto-Vavasseur über Eliminationstheorie beschrieben!
1978 hat Wen Jun Wu den Riquier-Ritt-Thomasschen Algorithmus – wie er ihn nennt – wieder aufgegriffen, um das Beweisen in der Elementargeometrie zu mechanisieren. 1991 setzt er fort: *On the construction of Groebner basis of a polynomial ideal based on Riquier-Janet theory* [67]. Aus der Zusammenfassung: *there may be associated to certain special kinds of differential ideals some well- behaved basis enjoying some well-behaved properties. If the differential ideals are further specialized so that they correspond to ordinary polynomial ideals then such a well-behaved basis will become the usual Grobner basis of the polynomial ideals, while the latter is not known for differential ideals* (Review by J. Apel).
Stimmt allerdings auch nicht ganz: A. Rosenfeld hatte 1959 in [55] ein *ranking of the set of all (including improper and higher) partial derivatives of D-indeterminates by the properties of a complete system of marks of Riquier* und *the reduction process etc in terms of some ranking* betrachtet.
1989 untersuchte T. Tsujishita *the compatibility of systems of super differential equations*. Das zentrale Konzept ist die *Grobner integrability*. Seit 1985 verwendet F. Schwarz *involutive Systeme* zur Bestimmung von Symmetrien von Dgln., ebenso V.L. Topunov.
Für Systeme polynomialer Gleichungen klären in den letzten Jahren A.Yu. Zharkov, Yu. A. Blinkov, V.P. Gerdt, D. Mall [39] u.a. den genauen Zusammenhang zwischen G.-Basen und den involutiven Systemen, indem sie die Divisionsalgorithmen von Thomas, Janet bzw. Pommaret mit dem Buchbergerschen vergleichen. Siehe den Überblicksvortrag von J. Apel: *Gröbner-Basen und Janet-Systeme* beim schon erwähnten Kolloquium zum 100. Geburtstag von W. Gröbner und den Artikel von A.V. Astrelin, O.D. Golubitsky, E.V. Pankratiev: *Gröbner bases and involutive bases* [4]. Vergleiche auch die eben erschienenen Hagenberger Vortragsausarbeitungen von E. Hubert [25, 26], J. Apel [3] und R. Hemmeke [24].
Die jüngste Idee von M. Saito, B. Sturmfels und N. Takayama Gröbner-Basen bzgl. verschiedener Ordnungen (*Gröbner deformations*) und Techniken klassischer Störungsrechnung für das Studium von Systemen mehrdimensionaler hypergeometrischer partieller Differentialgleichungen in Verbindung zu bringen [56] würde Gröbner sicher brennend interessieren!
Bezüglich der Theorie und der vielfältigen Anwendungen der Gröbner-Basen siehe B. Buchberger - F. Winkler [6] und die Lehrbücher [62, 10, 61, 11, 66, 15, 2, 5, 18, 9, 54]

9 Schlußwort

Schließen möchte ich mit den Worten Prof. Hlawkas:
Wolfgang Gröbner war ein Mensch mit großer Toleranz gegenüber andrer Meinung, er

machte keine hierarchischen Unterschiede, er war von bewundernwerter Arbeitskraft, die auch durch Krankheit und durch schwere Schicksalsschläge kaum beeinträchtigt wurde. Seine großartigen Leistungen sind bei den Mathematikern auf der ganzen Welt anerkannt. Seine zahlreichen Schüler und Freunde werden ihn nie vergessen!

Für fotografische und TEXnische Unterstützung danke ich Michael Schgraffer.

Literatur

[1] Shreeram S. Abhyankar and Wei Li, *On the Jacobian conjecture: a new approach via Gröbner bases*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), no. 3, 211–222.

[2] William W. Adams and Philippe Loustaunau, *An introduction to Gröbner bases*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[3] Joachim Apel, *Passive complete orthonomic systems of pdes and involutive bases of polynomial modules*, Symbolic and Numerical Scientific Computation (Hagenberg, 2001), Springer, Berlin, 2003, pp. 88–107.

[4] A. V. Astrelin, O. D. Golubitsky, and E. V. Pankratiev, *Gröbner bases and involutive bases*, Algebra (Moscow, 1998), de Gruyter, Berlin, 2000, pp. 49–55.

[5] Thomas Becker and Volker Weispfenning, *Gröbner bases*, Springer-Verlag, New York, 1993, A computational approach to commutative algebra, In cooperation with Heinz Kredel.

[6] B. Buchberger and F. Winkler (eds.), *Gröbner bases and applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Papers from the Conference on 33 Years of Gröbner Bases held at the University of Linz, Linz, February 2–4, 1998.

[7] Bruno Buchberger, *An algorithmic criterion for the solvability of a system of algebraic equations [MR* **42** *#3077]*, Gröbner bases and applications (Linz, 1998), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, Translated from the German by Michael Abramson and Robert Lumbert, pp. 535–545.

[8] J. C. Butcher, *The numerical analysis of ordinary differential equations*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.

[9] David Cox, John Little, and Donal O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1997, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

[10] ———, *Using algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[11] David A. Cox, *Introduction to Gröbner bases*, Applications of computational algebraic geometry (San Diego, CA, 1997), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 1–24.

[12] E. Delassus, *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles.*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 13, 421-467; C. R. 122, 772-775. ((1896)).

[13] ———, *Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 14, 21-44. ((1897)).

[14] Harry H. Denman, *Table errata: Integraltafel, Erster Teil: Unbestimmte Integrale (third edition, Springer, Vienna, 1961) by W. Gröbner and N. Hofreiter*, Math. Comp. **24** (1970), no. 110, 504.

[15] David Eisenbud, *Commutative algebra*, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.

[16] Michel Fliess, *Une approche algébrique du développement fonctionnel des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées*, Systems analysis (Conf., Bordeaux, 1978), Soc. Math. France, Paris, 1980, pp. 95–103.

[17] Michael Fritsche and Heinz Toparkus, *Zur Herleitung der Konsistenzbedingungen von Runge-Kutta Ansätzen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, IV (Georgenthal, 1985), Friedrich-Schiller-Univ., Jena, 1987, pp. 16–24.

[18] Ralf Fröberg, *An introduction to Gröbner bases*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.

[19] Kurt Girstmair and Ulrich Oberst, *Ein Verfahren zur konstruktiven Bestimmung von Galoisgruppen*, Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1976, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1976, pp. 31–44.

[20] Peter Goller and Gerhard Oberkofler, *...daß auf der Universiät*, Österreichische Mathematik und Physik, Zentralbibliothek Physik, Vienna, 1993, pp. 9–50.

[21] J. S. Griffith, *Lie transforms and perturbation methods*, Proceedings of the Manitoba Conference on Numerical Mathematics (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1971), Dept. Comput. Sci., Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1971, pp. 201–324.

[22] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. I*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1993, Nonstiff problems.

[23] Herwig Hauser and Gerd Müller, *Affine varieties and Lie algebras of vector fields*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 3, 309–337.

[24] Ralf Hemmecke, *Dynamical aspects of involutive bases computations*, Symbolic and Numerical Scientific Computation (Hagenberg, 2001), Springer, Berlin, 2003, pp. 168–182.

[25] Evelyne Hubert, *Notes on triangular sets and triangulation-decomposition algorithms i: Polynomial systems*, Symbolic and Numerical Scientific Computation (Hagenberg, 2001), Springer, Berlin, 2003, pp. 1–39.

[26] ______, *Notes on triangular sets and triangulation-decomposition algorithms ii: Differential systems*, Symbolic and Numerical Scientific Computation (Hagenberg, 2001), Springer, Berlin, 2003, pp. 40–87.

[27] V. P. Igumnov, *Application of a multidimensional generalization of Bruno's theorem to the problem of calculation of coefficients of Lie series*, Numerical mathematics and mathematical physics (Russian), Moskov. Gos. Ped. Inst., Moscow, 1984, pp. 120–129, 158.

[28] ______, *Representation of solutions of differential equations by modified Lie series*, Differentsialnye Uravneniya **20** (1984), no. 6, 952–958.

[29] M. Janet, *Les modules de formes algébriques et la théorie générale des systèmes différentielles.*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 41, 27-65 (1924). (1924).

[30] Matthias Kawski and Héctor J. Sussmann, *Noncommutative power series and formal Lie-algebraic techniques in nonlinear control theory*, Operators, systems, and linear algebra (Kaiserslautern, 1997), Teubner, Stuttgart, 1997, pp. 111–128.

[31] H. Knapp and G. Wanner, *On the numerical treatment of ordinary differential equations*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter II, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 43–97.

[32] P.-V. Koseleff, *Relations among Lie formal series and construction of symplectic integrators*, Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (San Juan, PR, 1993), Springer, Berlin, 1993, pp. 213–230.

[33] Gilbert Labelle, *Éclosions combinatoires appliquées à l'inversion multidimensionnelle des séries formelles*, J. Combin. Theory Ser. A **39** (1985), no. 1, 52–82.

[34] Pierre Leroux and Gérard X. Viennot, *Combinatorial resolution of systems of differential equations. I. Ordinary differential equations*, Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985), Springer, Berlin, 1986, pp. 210–245.

[35] P. A. Lesky and H. Sonderegger, *Orthogonalpolynome, die auf einem Intervall im Mittel und in den Randpunkten exakt approximieren*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **206** (1997), 3–14 (1998).

[36] R. Liedl and H. Reitberger, *Wolfgang Gröbner zum Gedenken (11.2.1899–20.8.1980)*, Yearbook: Surveys of mathematics 1981, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1981, pp. 255–256.

[37] X. Q. Liu and C. W. Li, *Product expansion for stochastic jump diffusions and its application to numerical approximation*, J. Comput. Appl. Math. **108** (1999), no. 1-2, 1–17.

[38] F. S. Macaulay, *Some properties of enumeration in the theory of modular systems.*, Proceedings L. M. S. (2) 26, 531-555 (1927). (1927) (EN).

[39] Daniel Mall, *On the relation between Gröbner and Pommaret bases*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **9** (1998), no. 2, 117–123.

[40] Claude Marché, *Normalized rewriting: a unified view of Knuth-Bendix completion and Gröbner bases computation*, Symbolic rewriting techniques (Ascona, 1995), Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 193–208.

[41] I. S. Marenich, *Application of Lie series and their generalizations to solving differential equations*, Partial differential equations (Russian), "Obrazovanie", St. Petersburg, 1992, pp. 82–97.

[42] M. G. Marinari, H. M. Möller, and T. Mora, *On multiplicities in polynomial system solving*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 8, 3283–3321.

[43] Elisabeth Matutat and Bodo Renschuch, *Perfekte Ideale und Idealtypen von Dubreil*, Wiss. Z. Pädagog. Hochsch. "Karl Liebknecht" Potsdam **17** (1973), 133–140.

[44] Hans Munthe-Kaas, *Lie-Butcher theory for Runge-Kutta methods*, BIT **35** (1995), no. 4, 572–587.

[45] Ulrich Oberst, *Multidimensional constant linear systems*, Acta Appl. Math. **20** (1990), no. 1-2, 1–175.

[46] ______, *On the minimal number of trajectories determining a multidimensional system*, Math. Control Signals Systems **6** (1993), no. 3, 264–288.

[47] ______, *Variations on the fundamental principle for linear systems of partial differential and difference equations with constant coefficients*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **6** (1995), no. 4-5, 211–243.

[48] ______, *Finite-dimensional systems of partial differential or difference equations*, Adv. in Appl. Math. **17** (1996), no. 3, 337–356.

[49] ______, *The construction of Noetherian operators*, J. Algebra **222** (1999), no. 2, 595–620.

[50] Heinrich Reitberger, *Inversionsformeln, G.–Basen und Lie-Reihen.*, In Vorb.

[51] ______, *The turbulent fifties in resolution of singularities*, Resolution of singularities (Obergurgl, 1997), Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 533–537.

[52] B. Renschuch, H. Roloff, and G.G. Rasputin, *On forgotten papers of N. M. Gyunter on the theory of polynomial ideals.*, Vestn. Leningr. Univ., Ser. I **1987** (1987), no. 1, 119–122 (Russian. English summary).

[53] Bodo Renschuch, Hartmut Roloff, and Georgij G. Rasputin, *Beitraege zur konstruktiven Theorie der Polynomideale. XXIII: Vergessene Arbeiten des Leningrader Mathematikers N. M. Gjunter zur Theorie der Polynomideale. (Contributions to the constructive theory of polynomial ideals. XXIII: Forgotten papers of the Leningrad mathematician N. M. Gjunter on the theory of polynomial ideals).*, Wiss. Z. Paedagog. Hochsch. Karl Liebknecht, Potsdam **31** (1987), 111–126 (German).

[54] Lorenzo Robbiano, *Introduction to the theory of Gröbner bases*, The Curves Seminar at Queen's, Vol. V (Kingston, ON, 1987–1988), Queen's Univ., Kingston, ON, 1988, pp. Exp. No. B, 29.

[55] Azriel Rosenfeld, *Specializations in differential algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 394–407.

[56] Mutsumi Saito, Bernd Sturmfels, and Nobuki Takayama, *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[57] M. Sofroniou, *Symbolic derivation of Runge-Kutta methods*, J. Symbolic Comput. **18** (1994), no. 3, 265–296.

[58] V. A. Ufnarovskiĭ, *Combinatorial and asymptotic methods in algebra*, Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 57 (Russian), Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990, pp. 5–177.

[59] Arno van den Essen, *A criterion to decide if a polynomial map is invertible and to compute the inverse*, Comm. Algebra **18** (1990), no. 10, 3183–3186.

[60] ______, *Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows, morphisms and G_a-actions. II*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), no. 3, 667–678.

[61] Wolmer V. Vasconcelos, *Computational methods in commutative algebra and algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1998, With chapters by David Eisenbud, Daniel R. Grayson, Jürgen Herzog and Michael Stillman.

[62] Joachim von zur Gathen and Jürgen Gerhard, *Modern computer algebra*, Cambridge University Press, New York, 1999.

[63] G. Wanner and H. Reitberger, *On the perturbation formulas of Gröbner and Alekseev*, Bul. Inst. Politehn. Iaşi (N.S.) **19(23)** (1973), no. 1-2, part I, 15–26.

[64] Gerhard Wanner, *Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Lie-Reihen (mit Programmen), Runge-Kutta-Methoden*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969, B.I-Hochschulskripten, 831/831a.

[65] Rudolf Winkel, *An exponential formula for polynomial vector fields. II. Lie series, exponential substitution, and rooted trees*, Adv. Math. **147** (1999), no. 2, 260–303.

[66] F. Winkler, *Polynomial algorithms in computer algebra*, Springer-Verlag, Vienna, 1996.

[67] Wen Jun Wu, *On the construction of Groebner basis of a polynomial ideal based on Riquier-Janet theory*, Systems Sci. Math. Sci. **4** (1991), no. 3, 193–207.

Gröbners Werk

[68] F. Cap and W. Gröbner, *New method for the solution of the deuteron problem, and its application to a regular potential*, Nuovo Cimento (10) **1** (1955), 1211–1222.

[69] F. Cap, W. Gröbner, and P. Lesky, *The astronomical n-body problem with time-dependent forces*, Acta Phys. Austriaca **15** (1962), 213–216.

[70] Fabio Conforto, *Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1956, Aus dem Nachlass bearbeitet und herausgegeben von W. Gröbner, A. Andreotti und M. Rosati.

[71] Volfango Gröbner, *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **23** (1957), 375–379.

[72] W. Gröbner, *Applicazione del calcolo vettoriale alla geometria algebrica*, Ann. Univ. Ferrara. Parte I. **8** (1948–50), 63–68 (1951).

[73] ______, *Sulle varietà perfette*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **28** (1949), 217–219.

[74] ______, *Über die Syzygientheorie der Polynomideale*, Monatsh. Math. **53** (1949), 1–16.

[75] ______, *Über die Eliminationstheorie*, Monatsh. Math. **54** (1950), 71–78.

[76] ______, *Ein Irreduzibilitätskriterium für Primärideale in kommutativen Ringen*, Monatsh. Math. **55** (1951), 138–145.

[77] ______, *Oberflächenwellen von Flüssigkeiten*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (3) **5** (1951), 175–191.

[78] ______, *Über den idealtheoretischen Beweis des Satzes von Bézout*, Monatsh. Math. **55** (1951), 82–86.

[79] ______, *Über die Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Physik*, Studium Generale **4** (1951), 72–77.

[80] ______, *La théorie des idéaux et la géométrie algébrique*, Deuxième Colloque de Géométrie Algébrique, Liège, 1952, Georges Thone, Liège, 1952, pp. 129–144.

[81] ______, *Die birationalen Transformationen der Polynomideale*, Monatsh. Math. **58** (1954), 266–286.

[82] ______, *Über Streuungs- und Stabilisierungsfunktionen bei Differentialgleichungen der theoretischen Mechanik*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **39** (1955), 11–14.

[83] ______, *Über die Berücksichtigung der Reibung bei Schwingungsproblemen*, Österreich. Ing.-Arch. **10** (1956), 171–175.

[84] ———, *Über die idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III, Erven P. Noordhoff N.V., Groningen, 1956, pp. 447–456.

[85] ———, *Kontinuierliche Transformationsgruppen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten*, Monatsh. Math. **61** (1957), 209–224.

[86] ———, *Steuerungsprobleme mit Optimalbedingung*, Math.-Tech.-Wirtschaft **8** (1961), 62–64.

[87] ———, *Über das Umkehrproblem der Abelschen Integrale*, Math. Z. **77** (1961), 101–105.

[88] ———, *Über die Darstellung von implizit gegebenen Funktionen mittels Lie-Reihen und Verallgemeinerungen der Lagrangeschen Reihe*, Monatsh. Math. **66** (1962), 129–139.

[89] ———, *Lösung der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mittels Li-Reihen*, Monatsh. Math. **68** (1964), 113–124.

[90] ———, *Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen*, Arch. Math. **16** (1965), 257–264.

[91] W. Gröbner (ed.), *Contributions to the method of Lie series*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

[92] ———, *Serie di Lie e loro applicazioni*, Cremonese, Rome, 1973, Con un'appendice "Applicazioni numeriche della serie di Lie per la soluzione di equazioni differenziali ordinarie" di H. Knapp e G. Wanner, Poliedro, No. 18.

[93] ———, *Gruppi, anelli e algebre di Lie*, Cremonese, Rome, 1975, Con un'appendice "Sulla linearizzazione degli operatori differenziali nell'intorno di un punto critico" di H. Reitberger, Poliedro, No. 20.

[94] W. Gröbner and P. Lesky, *Eigenschwingungen eines Kreisringes mit rechteckigem Querschnitt*, Österreich. Ing.-Arch. **7** (1953), 254–262.

[95] W. Gröbner and I. Raab, *Über die Berechnung von Raketenbahnen im Felde mehrerer gravitierender Massen mit Hilfe von Lie-Reihen*, Acta Phys. Austriaca **16** (1963), 379–381.

[96] W. Gröbner and W. Watzlawek, *Verallgemeinerte Lie-Reihen mit Operatoren höherer Ordnung*, Monatsh. Math. **69** (1965), 136–145.

[97] Wolfango Gröbner, *Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni*, Rend. Sem. Mat. Roma **3** (1939), 29–53.

[98] Wolfgang Gröbner, *Der Weg aufwärts*, Braumüller-Verlag, Wien-Leipzig, 1935, Ein Buch über Religion und Weltanschauung.

[99] Wolfgang Gröbner, *Idealtheoretischer Aufbau der algebraischen Geometrie. I*, Hamburger Math. Einzelschr. **30** (1941), 56.

[100] ———, *L'algebra moderna e la geometria algebrica*, Atti Convegno Mat. Roma **1942** (1942), 215–222 (1945).

[101] ———, *Über eine Näherungsmethode für die ebene Potentialströmung einer kompressiblen Flüssigkeit*, Luftfahrtforschung **20** (1943), 184–191.

[102] ———, *Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- une zwei-dimensionalen Bereichen*, Monatsh. Math. **52** (1948), 38–54.

[103] ———, *Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen*, Springer-Verlag, Wien und Innsbruck, 1949.

[104] ———, *L'ideale aggiunto di una varietá algebrica*, Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **10** (1951), 57–63.

[105] ———, *Über den Multiplizitätsbegriff in der algebraischen Geometrie*, Math. Nachr. **4** (1951), 193–201.

[106] ———, *Sopra un teorema di Severi*, Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **11** (1952), 217–223.

[107] ———, *Über das arithmetische Geschlecht einer algebraischen Mannigfaltigkeit*, Arch. Math. **3** (1952), 351–359.

[108] ———, *Über das Verhalten der Hilbertfunktion eines H-Ideals bei rationalen Transformationen*, Arch. Math. **5** (1954), 1–3.

[109] ———, *Matrizenrechnung*, Verlag von R. Oldenbourg, München, 1956.

[110] ———, *Sopra lo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **11** (1956), 319–327.

[111] ———, *Die Darstellung der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen durch Liesche Reihen*, Arch. Math. **9** (1958), 82–93.

[112] ———, *Le soluzioni generali del problema degli n corpi rappresentate mediante serie di Lie*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **24** (1958), 11–15.

[113] ———, *L'inversione di un sistema di funzioni analitiche mediante serie di Lie*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **24** (1958), 386–390.

[114] ———, *Über die Parameterdarstellungen algebraischer Mannigfaltigkeiten mittels Liescher Reihen*, Math. Nachr. **18** (1958), 360–375.

[115] ———, *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960, Mathematische Monographien, 3.

[116] ———, *Applicazioni delle serie di Lie nella geometria algebrica*, Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat. **20** (1960/1961), 217–226.

[117] ———, *Sopra un teorema di B. Segre*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **31** (1961), 118–122.

[118] ———, *Applicazioni delle serie di Lie nella geometria algebrica*, Atti Convegno Internaz. Geometria Algebrica (Torino, 1961), Rattero, Turin, 1962, pp. 165–174.

[119] ———, *Über die Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungs-systemen mit Randbedingungen*, Math.-Tech.-Wirtschaft **9** (1962), 148–151.

[120] ———, *Sulle matrici risolventi di Picone che verificano la condizione di permutabilità*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **39** (1965), 167–169.

[121] ———, *Teoria degli ideali e geometria algebrica*, Seminari 1962/63 Anal. Alg. Geom. e Topol., Vol. 1, Ist. Naz. Alta Mat., Ediz. Cremonese, Rome, 1965, pp. 216–312.

[122] ———, *Matrizenrechnung*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966, B. I.-Hochschultaschenbücher, No. 103/103a.

[123] ———, *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, Zweite, überarbeitete und erweiterte Auflage. Mathematische Monographien, Band 3.

[124] ———, *Orthogonale Polynomsysteme, die gleichzeitig mit $f(x)$ auch deren Ableitung $f'(x)$ approximieren*, Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik (Oberwolfach, 1965), Birkhäuser, Basel, 1967, pp. 24–32.

[125] ———, *Algebraische Geometrie. 1. Teil: Allgemeine Theorie der kommutativen Ringe und Körper*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968, B.I-Hochschultaschenbücher, 273/273a.

[126] ———, *Über das Reduzibilitätsideal eines Polynoms*, J. Reine Angew. Math. **239/240** (1969), 214–219.

[127] ———, *Algebraische Geometrie. 2. Teil: Arithmetische Theorie der Polynomringe*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970, B. I. Hochschultaschenbücher, 737/737a*.

[128] ———, *Teoria degli ideali e geometria algebrica*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **41** (1971), 171–242.

[129] ———, *Differentialgleichungen. I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1977, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Mathematik für Physiker, No. 6.

[130] ———, *Differentialgleichungen. II*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1977, Partielle Differentialgleichungen, Mathematik für Physiker, Band 7.

[131] ———, *Die Galois-Theorie*, Monatsh. Math. **85** (1978), no. 3, 185–188.

[132] Wolfgang Gröbner and Gilbert Helmberg, *Ein Regularitätskriterium für Stellenringe*, J. Reine Angew. Math. **213** (1963/1964), 39–42.

[133] Wolfgang Gröbner and Nikolaus Hofreiter, *Integraltafel. Teil 1: Unbestimmte Integrale*, Springer-Verlag, Vienna, 1961, 3te, verbesserte Aufl.

[134] ———, *Integraltafel. Teil 2: Bestimmte Integrale*, Springer-Verlag, Vienna, 1961, 3te, verbesserte Aufl.

[135] Wolfgang Gröbner and Peter Lesky, *Mathematische Methoden der Physik. I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1964, B.I-Hochschultaschenbücher, Band 89.

[136] Wolfgang Gröbner and Heinrich Reitberger, *Über einige neue Ergebnisse und Probleme in der algebraischen Geometrie*, Beiträge zur algebraischen Geometrie, Univ. Innsbruck, Innsbruck, 1974, pp. 7–15. Veröffentlichungen Univ. Innsbruck, No. 91, Math. Studien, No. I.

[137] W. Groebner, *Minimalbasis der Quaternionengruppe.*, Monatsh. Math. Phys. **41** (1934), 78–84 (German).

[138] ———, *General theory of the Lie series*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter I, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 1–42.

[139] ———, *Nonlinear partial differential equations of the first order and application*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter IV, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 179–220.

[140] ———, *Il concetto di molteplicità nella geometria algebrica*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **40** (1970), 93–100.

[141] W. Groebner, H. Reitberger, and G. Wanner, *Invariant functions and characteristics belonging to Lie operators.*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter III, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 99–177.

[142] W. Groebner and W. Watzlawek, *Linear partial differential equations of higher order*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter V, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 221–253.

[143] Wolfango Groebner, *Ricerche sopra il rango dei moduli nei campi dei polinomi omogenei.*, Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital., Firenze 1937, 1938, pp. 219–221 (Italian).

[144] ———, *Risultati dell'applicazione del metodo variazionale in alcuni problemi di propagazione.*, Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital., Firenze 1937, 1938, pp. 222–225 (Italian).

[145] ———, *Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni.*, Rend. Semin. Mat. Roma, IV. Ser. **3** (1939), 29–53 (Italian).

[146] Wolfgang Groebner, *Ueber Minimalbasen fuer die Invariantenkoerper zyklischer und metazyklischer Permutationsgruppen.*, Anz. Akad. Wiss., Wien No. **5** (1932), 43–44 (German).

[147] ———, *Ueber irreduzible Ideale in kommutativen Ringen.*, Math. Ann. **110** (1934), 197–222 (German).

[148] ———, *Algebraische Geometrie auf vektorieller Grundlage.*, Abh. Math. Semin. Hansische Univ. **12** (1938), 354–368 (English).

[149] ———, *Severis Begruendung der algebraischen Geometrie mittels des "Metodo rapido".*, Abh. Math. Semin. Hansische Univ. **12** (1938), 340–353 (German).

[150] ———, *Ueber das Macaulaysche inverse System und dessen Bedeutung fuer die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*, Abh. Math. Semin. Hansische Univ. **12** (1938), 127–132 (German).

[151] ———, *Ueber eine neue idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie.*, Math. Ann. **115** (1938), 333–358 (German).

[152] ———, *Ueber die algebraischen Eigenschaften der Integrale von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*, Monatsh. Math. Phys. **47** (1939), 247–284 (German).

[153] ———, *Recenti risultati ed applicazioni delle serie di Lie*, Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat. **24** (1964/1965), 31–40.

[154] ———, *Applicazioni delle serie di Lie ai problemi della meccanica razionale*, Simpos. Internaz. Appl. Anal. Fis. Mat. (Cagliari-Sassari, 1964), Edizioni Cremonese, Rome, 1965, pp. 78–83.

[155] ———, *Sul gruppo ortogonale e sulle rotazioni nello IR^n*, Accad. Naz. Sci. Lett. Arti Modena Atti Mem. (6) **13** (1971), 74–91.

[156] ———, *Über die idealth. Grundl. der algebr. Geom.*, Geometrie (K. Strubecker, ed.), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972, Wege der Forschung, Band CLXXVII, pp. vi+448.

[157] ______, *Introd. to Part B, Rings and ideals (with P.Lesky)*, Fundamentals of mathematics (H. Behnke, K. Fladt, W. Süss, F. Hohenberg, G. Pickert, and H. Rau, eds.), MIT Press, Cambridge, Mass., 1974, Vol. I: Foundations of mathematics. The real number system and algebra, Translated from the second German edition by S. H. Gould, pp. x+549.

[158] Giulio Krall and Wolfango Groebner, *Analisi del moto fluido in un tunnel idrodinamico a sezione rettangolare e radialsimmetrico (con deflusso al entro) secondo il metodo di Karman.*, Ric. Sci. Progr. Tecn. Econom. Naz. **10** (1939), 42–48 (Italian).